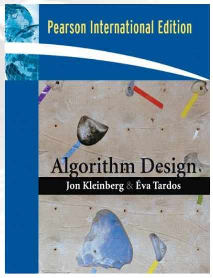
DECSAI
Departamento de Ciencias de la Computación e I.A.
Universidad de Granada



Asignaciones Estables

Análisis y Diseño de Algoritmos

Problema

Stable Matching Problem
(David Gale & Lloyd Shapley, 1962)

Cómo diseñar el proceso de admisión de alumnos de la Universidad o de asignación de personal en una empresa (p.ej. prácticas en empresa)…

… teniendo en cuenta el orden de preferencias de las empresas y de los alumnos.

Problema

Objetivo:

Dado el conjunto de preferencias de las empresas y de los alumnos en prácticas, diseñar un proceso de asignación que conduzca a una asignación estable.

Par inestable:

El alumno X y la empresa Y son un par inestable si

- X prefiere Y en vez de la empresa a la que ha sido asignado.
- Y prefiere a X en lugar del alumno que le ha sido asignado.

Problema

Objetivo:

Dado el conjunto de preferencias de las empresas y de los alumnos en prácticas, diseñar un proceso de asignación que conduzca a una asignación estable.

Asignación estable:

Una asignación sin pares inestables.

¿Por qué es deseable una asignación estable?

Porque se reduce la insatisfacción de empresas y alumnos, además de eliminar la necesidad de realizar reasignaciones (nadie tiene incentivos para cambiar su asignación).

Problema

En otros términos: Emparejamientos estables

Dados n hombres y m mujeres, encontrar un emparejamiento estable de hombres con mujeres.

Cada persona "evalúa" a las personas del sexo opuesto.

- Los hombres ordenan a las mujeres según sus preferencias.
- Las mujeres ordenan a los hombres según sus preferencias.

Problema

En otros términos: Emparejamientos estables

Emparejamiento perfecto:
Todo el mundo emparejado de forma "monógama".

- Cada hombre emparejado con una mujer.
- Cada mujer emparejada con un hombre.

Estabilidad: Ninguna pareja participante tiene incentivos para romper la asignación.

- Una pareja no emparejada h-m es inestable si tanto el hombre h como la mujer m se prefieren mutuamente antes que a sus parejas actuales.
- La pareja inestable podría "mejorar" engañando a sus actuales parejas.

Algoritmo

Entrada: Listas de preferencias

Preferencias de los hombres (Favorita → Menos favorita)

	1st	2nd	3rd
Jorge	Ana	Bea	Clara
Luis	Bea	Ana	Clara
Mario	Ana	Bea	Clara

Preferencias de las mujeres (Favorito → Menos favorito)

	1st	2nd	3rd
Ana	Luis	Jorge	Mario
Bea	Jorge	Luis	Mario
Clara	Jorge	Luis	Mario

Salida: Un emparejamiento estable (si existe)

Algoritmo

¿Es estable la siguiente asignación?
{(Jorge,Clara), (Luis,Bea), (Mario, Ana)}

Preferencias de los hombres (Favorita → Menos favorita)

	1st	2nd	3rd
Jorge	Ana	Bea	Clara
Luis	Bea	Ana	Clara
Mario	Ana	Bea	Clara

Preferencias de las mujeres (Favorito → Menos favorito)

	1st	2nd	3rd
Ana	Luis	Jorge	Mario
Bea	Jorge	Luis	Mario
Clara	Jorge	Luis	Mario

NO, ES INESTABLE:
Bea y Jorge preferirían salir juntos.

Algoritmo

¿Es estable la siguiente asignación?
{(Jorge,Ana), (Luis,Bea), (Mario, Clara)}

Favorita → 1st; Menos favorita → 3rd

	1st	2nd	3rd
Jorge	Ana	Bea	Clara
Luis	Bea	Ana	Clara
Mario	Ana	Bea	Clara

Preferencias de los hombres

Favorito → 1st; Menos favorito → 3rd

	1st	2nd	3rd
Ana	Luis	Jorge	Mario
Bea	Jorge	Luis	Mario
Clara	Jorge	Luis	Mario

Preferencias de las mujeres

SÍ

Nadie "preferiría" cambiar de pareja.

Algoritmo de Gale-Shapley

```
Inicialmente, todas las personas están sin pareja

while ( queden hombres sin pareja que no le hayan pedido
        salir a todas las mujeres) {

   m = Uno de esos hombres
   w = Primera mujer en la lista de m
       a quien todavía no le haya pedido salir

   if (w está sin pareja)
      Añadir (m,w) a los emparejamientos
   else if (w prefiere a m frente a su pareja actual m')
      Añadir (m,w) a los emparejamientos
      Dejar a m' sin pareja
   else
      w rechaza a m
}
```

Algoritmo de Gale-Shapley

El algoritmo de Gale-Shapley (1962)
garantiza encontrar un emparejamiento estable.

Demostración de la corrección del algoritmo

Propiedad 1: Los hombres se declaran a las mujeres en orden decreciente de preferencias.

Propiedad 2: Una vez que una mujer se empareja, sólo cambia de estado para mejorar de pareja.

Algoritmo de Gale-Shapley

Corrección del algoritmo: Terminación

El algoritmo de Gale-Shapley termina después de, como mucho, $\mathbf{n^2}$ iteraciones del bucle while.

Demostración

- En cada iteración, un hombre le pide salir a una mujer.
- Sólo hay $\mathbf{n^2}$ posibles proposiciones.

Sea P(t) el conjunto de pares (m,w) en los que m le ha propuesto salir a w al final de la iteración t. Para todo t, P(t+1) es estrictamente mayor que P(t). Como sólo hay $\mathbf{n^2}$ posibles pares, P(t) sólo puede aumentar $\mathbf{n^2}$ veces, por lo que no nunca habrá más de $\mathbf{n^2}$ iteraciones. QED.

Algoritmo de Gale-Shapley

Corrección del algoritmo: Perfección

El algoritmo de Gale-Shapley
devuelve un emparejamiento perfecto.

Demostración (por reducción al absurdo)

- Supongamos que un hombre M no está emparejado al terminar la ejecución del algoritmo.
- Entonces, una mujer W no tendrá pareja.
- Pero, por la propiedad 2, W no recibió ninguna proposición.
- Sin embargo, M sólo puede terminar sin pareja después de haberle propuesto salir a todas las mujeres.

Algoritmo de Gale-Shapley

Corrección del algoritmo: Estabilidad

El algoritmo de Gale-Shapley
devuelve un emparejamiento estable.

Demostración (por reducción al absurdo)

Supongamos que (M,W) es una pareja inestable en el emparejamiento devuelto por el algoritmo.

- Caso 1: M nunca le pidió salir a W $\Rightarrow$ M prefiere a su pareja actual antes que a W (propiedad 1) $\Rightarrow$ (M,W) es estable.
- Caso 2: M le pidió salir a W $\Rightarrow$ W rechazó a M (directamente o después de encontrar a alguien mejor) $\Rightarrow$ W prefiere su pareja actual antes que a M (propiedad 2) $\Rightarrow$ (M,W) es estable.

En cualquier caso, (M,W) es estable.

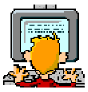
Implementación eficiente

Hay que ser muy cuidadosos a la hora de implementar el algoritmo (p.ej. selección de estructuras de datos):

Ana	1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	6^{th}	7^{th}	8^{th}
Preferencias	8	3	7	1	4	5	6	2

Ana	1	2	3	4	5	6	7	8
`inversa`	4^{th}	8^{th}	2^{nd}	5^{th}	6^{th}	7^{th}	3^{rd}	1^{st}

Ana prefiere al tercer candidato antes que al sexto, ya que `inversa[3]` < `inversa[6]`

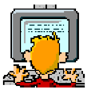


Implementación eficiente

¿Por qué es tan importante hacerlo bien?

	Implementación "ingenua"	Implementación eficiente
Operaciones	**n^3**	**n^2**
n = 10	1 segundo	0.1 segundos
n = 100	> 15 minutos	10 segundos
n = 1000	> 275 horas	> 15 minutos
n = 10000	> 30 años	> 25 horas

suponiendo 1ms por iteración del bucle.



Cuestiones adicionales

Si existen varios emparejamientos estables,
¿cuál devuelve el algoritmo de Gale-Shapley?

Un hombre m es una pareja válida para una mujer w
si existe un emparejamiento estable en el que estén emparejados.

Asignación óptima para los hombres:
Cuando todos los hombres consiguen a su mejor pareja válida.

La ejecución del algoritmo de Gale-Shapley
obtiene un emparejamiento estable que, además,
es una asignación óptima para los hombres.

Cuestiones adicionales

Demostración (por reducción al absurdo)

- Supongamos que algún hombre queda emparejado con una pareja que no es su mejor pareja válida.
- Los hombres se declaran en orden decreciente de preferencias, por lo que algún hombre fue rechazado por su mejor pareja válida.
- Sea M el primer hombre así, W la primera pareja válida que lo rechazó y S un emparejamiento estable en el que está (M,W).
- Cuando W rechaza a M, W se empareja (o reafirma su compromiso) con Z, al que prefiere antes que a M.
- Sea B la pareja de Z en S:
- Z no había sido rechazado por ninguna pareja válida cuando W rechazó a M. Por tanto, Z prefiere a B antes que a W.
- Aunque W prefiera a Z antes que a M, (W,Z) es inestable.

Cuestiones adicionales

En el algoritmo de Gale-Shapley,
cuando los hombres son los que se declaran,
todos consiguen a su mejor pareja válida.

Ahora bien,
¿la asignación óptima para los hombres
se consigue a costa de las mujeres?

SÍ

¡Todas las mujeres consiguen a su peor pareja válida!

Cuestiones adicionales

Demostración (por reducción al absurdo)

- Supongamos que (M,W) es una pareja en el emparejamiento devuelto por el algoritmo de Gale-Shapley,
pero M no es la peor pareja válida para W.
- Entonces, existe un emparejamiento estable S en el que W quedaría emparejada con Z, que le gusta aún menos que M.
- Sea B la pareja de M en S.
- M preferiría a W antes que a B,
- Por lo que (M,W) sería inestable en S.

Cuestiones adicionales

¿Podrían los participantes "engañar" al algoritmo de Gale-Shapley para salir beneficiados?

Los hombres, obviamente no. Algunas mujeres, sí (si conocen las preferencias de todos los demás).

Favorita → Menos favorita

	1st	2nd	3rd
Jorge	Ana	Bea	Clara
Luis	Bea	Ana	Clara
Mario	Ana	Bea	Clara

Preferencias de los hombres

Favorito → Menos favorito

	1st	2nd	3rd
Ana	Luis	Jorge	Mario
Bea	Jorge	Luis	Mario
Clara	Jorge	Luis	Mario

Preferencias reales de las mujeres

	1st	2nd	3rd
Ana	Luis	Mario	Jorge
Bea	Jorge	Luis	Mario
Clara	Jorge	Luis	Mario

Ana miente para mejorar…

Cuestiones adicionales

Posibles extensiones

vg: Hombres ⇒ Hospitales
Mujeres ⇒ Médicos residentes

- Algunos participantes declaran inaceptables a otros.
  p.ej. Un médico residente que no quiere ir destinado a Ceuta.
- Número desigual de participantes.
  p.ej. Más candidatos que plazas.
- "Poligamia" limitada.
  p.ej. Un hospital admite a varios médicos residentes.

Cuestiones adicionales

¿Existirán siempre emparejamientos estables?

Compañeros de habitación

2n personas, cada una de las cuales ordena a las demás (2n-1)

	1st	2nd	3rd
Antonio	B	C	D
Benito	C	A	D
Carlos	A	B	D
Daniel	A	B	C

{ (A,B), (C,D) } $\Rightarrow$ (B,C) inestable
{ (A,C), (B,D) } $\Rightarrow$ (A,B) inestable
{ (A,D), (B,C) } $\Rightarrow$ (A,C) inestable